Tentamen Dynamische Systemen, 29/jan/2009

- Schrijf op ieder vel je naam en het aantal vellen dat je inlevert.
- Laat steeds duidelijk zien hoe je aan het antwoord gekomen bent.
- Er zijn drie opgaven. Succes!

Opgave 1 Beschouw een gladde functie $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en daarbij de tweede orde differentiaalvergelijking

$$x'' = -\frac{dV}{dx}(x). \tag{1}$$

Schrijf deze bewegingsvergelijking als een dynamisch systeem met als toestandsruimte het (x, y)-fasevlak, waarbij $y = x'$.

a) Definieer $H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x)$ en laat zien dat H een behouden grootheid is, d.w.z., dat langs elke evolutie $\{(x(t), y(t)) \mid t \geq 0\}$ van het dynamisch systeem geldt dat $H' \equiv 0$.

b) Toon aan dat bovenstaand dynamisch systeem geen attractoren kan hebben.

c) Omschrijf voor $V_1(x) = x^3 - x^2$ and $V_2(x) = x^4 - x^2$ het typische gedrag van het bijbehorende dynamische systeem. Schets de bijbehorende faseportretten.

d) Hoe verandert dit als we vergelijking (1) veranderen tot

$$x'' = -\frac{dV}{dx}(x) - cx', \tag{2}$$

voor een constante $c > 0$? Schets opnieuw de bijbehorende faseportretten.

e) Laat zien dat vergelijking (2) geen periodieke evoluties kan hebben als $c > 0$.

Opgave 2 Op de 2-torus $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ beschouwen we coordinaten (x_1, x_2) modulo $\mathbb{Z}$. Voor een vector $\Omega = (\omega_1, \omega_2)$ beschouwen we het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \omega_1 \\ \dot{x}_2 &= \omega_2, \end{aligned} \tag{3}$$

waarbij we Ω de *frequentie-vector* noemen. Laat A een 2×2-matrix zijn met gehele coefficienten en met $\det A = 1$; je mag aannemen dat A een diffeomorfisme $\varphi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ definieert. Beschouw het via φ uit (3) getransformeerde stelsel differentiaalvergelijkingen. Toon aan dat dit dezelfde vorm heeft als (3), maar nu met frequentie-vector $A\Omega$.

(Zie ommezijde)

Opgave 3 Mogelijke overeenkomsten en verschillen tussen twee afbeeldingen f en g. We beginnen met f.

1. We beschouwen de afbeelding $f : [0,1] \to [0,1]$, gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{als } x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x & \text{als } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

   (a) Schets de grafieken van f en f^2 (de twee keer geïtereerde).
   (b) Ontwerp een symbolische dynamica voor f.
   (c) Hoe volgt hieruit dat er periodieke punten van f zijn en dichte banen?
   (d) Gegeven een dichte baan $\mathcal{O}^+(x) = \{f^n(x) | n \geq 0\}$, toon dan voor de bijbehorende waarde van de verstrooiïngsexponent E aan dat $E = \ln 2$.

2. Beschouw ook de afbeelding $g : [0,1] \to [0,1]$, gedefinieerd door $g(x) = 4x(1-x)$.

   (a) Toon aan dat f en g geconjugeerd zijn door middel van het homeomorfisme $h : [0,1] \to [0,1]$, gegeven door $h(x) = (\sin(\frac{\pi x}{2}))^2$.
   (b) In welke zin volgt uit onderdeel A dat g (ook) chaotisch is?